Zadání a řešení testu z matematiky a zpráva o výsledcích přijímacího řízení do magisterského navazujícího studia od jara 2016

Zpráva o výsledcích přijímacího řízení

do magisterského navazujícího studia od jara 2016

Počet podaných přihlášek	150
Počet přihlášených uchazečů	138
Počet uchazečů, kteří splnili podmínky přijetí	71
Počet uchazečů, kteří nesplnili podmínky přijetí	67
Počet uchazečů přijatých ke studiu, bez uvedení počtu uchazečů přijatých ke studiu až na základě výsledku přezkoumání původního rozhodnutí	71
Počet uchazečů přijatých celkem	71
Percentil pro přijetí	11,49

Základní statistické charakteristiky

		Matematika	Informatika	Celkem
Počet otázek		25	30	55
Počet uchazečů, kteří se zúčastnili přijímací zkoušky		87	87	87
Nejlepší možný výsledek		25.00	30.00	55.00
Nejlepší skutečně dosažený výsledek		23.75	27.50	51.25
Průměrný výsledek		14.88	16.48	31.36
Medián		15.00	16.75	32.25
Směrodatná odchylka		4.67	5.23	8.69
	Percentil			
Decilové hranice výsledku *	10	8.25	11.00	19.50
	20	11.75	13.25	26.00
	30	13.25	13.75	29.25
	40	14.25	15.50	30.75
	50	15.00	16.75	32.25
	60	15.75	17.75	33.75
	70	17.25	19.50	35.25
	80	19.00	20.75	37.75
	90	20.50	22.50	41.00

* Decilové hranice výsledku zkoušky vyjádřené d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9 jsou hranice stanovené tak, že rozdělují uchazeče seřazené podle výsledku zkoušky do stejně velkých skupin, přičemž d5 je medián.

Přijímací zkouška - Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		12

Množiny, relace, funkce, logika

1 Mějme dvouprvkovou množinu A. Kolik existuje na této množině binárních relací, které jsou reflexivní?

***A** 4
B 1
C 6
D 8
E 2

---

2 Nechť A a B jsou libovolné množiny. Které z následujících tvrzení je obecně pravdivé? (Pozn: pojem *funkce* je synonymem pojmu *totální funkce*.)

A Každá injektivní funkce z A do B je také bijektivní.
B Pokud jsou obě množiny A a B konečné, existuje funkce z A do B, která je injektivní.
C Existuje funkce z A do B, která je bijektivní.
***D** Pokud je množina A konečná a existuje surjektivní funkce z A do B, je i množina B konečná.
E Existuje právě jedna injektivní funkce z A do B.

---

3 Pro danou množinu A označme $\mathcal{P}(A)$ množinu všech podmnožin množiny A. Čemu je rovna množina $\mathcal{P}(\{a,b,c\} \cap \{b,c,d\})$?

A $\{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
B $\emptyset$
C $\{b,c\}$
D $\{\{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$
***E** $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$

---

4 Která z následujících predikátových formulí je sémanticky ekvivalentní formuli $\neg\forall x \exists y (P(x,y) \vee P(y,x))$? ($P$ je binární predikát a x, y jsou proměnné.)

***A** $\exists x \forall y (\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$
B $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))$
C $\exists x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$
D $\forall x \exists y (\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$
E $\forall x \forall y (\neg P(x,y) \vee \neg P(y,x))$

---

5 Uvažme relaci R na množině celých čísel takovou, že a je v relaci s b právě tehdy, když $b = 2a$. Uvedená relace:

A je reflexivní, je tranzitivní a není antisymetrická.
B je tranzitivní, je antisymetrická a není reflexivní.
***C** je antisymetrická, není reflexivní a není tranzitivní.
D je reflexivní, není antisymetrická a není tranzitivní.
E je reflexivní, je antisymetrická a není tranzitivní.

---

6 Která z následujících výrokových formulí je splnitelná?

***A** $(B \Rightarrow A) \wedge (B \Rightarrow \neg A)$
B $A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge \neg B$
C $(A \Leftrightarrow \neg A) \wedge B$
D $(A \Leftrightarrow B) \wedge \neg A \wedge B$
E $(B \Leftrightarrow A) \wedge (B \Leftrightarrow \neg A)$

Lineární algebra

7 Která z následujících funkcí zadává lineární zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$?

A $f(x) = x^2$
B $f(x) = \ln x$
***C** žádná z uvedených
D $f(x) = \sin(x)$
E $f(x) = x^2 + 2$

---

8 Nechť $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ je k ní inverzní matice. Čemu se rovná $b_{2,2}$?

A 1
***B** 2
C 0
D -1
E -2

9 Uvažme vektor $(3,1,2)$ ve standardní bázi $[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$. Najděte jeho souřadnice v bázi $[(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)]$.

***A** $(1,2,2)$
B $(3,1,2)$
C $(0,2,1)$
D $(1,2,1)$
E Vyjádření v zadané bázi neexistuje.

---

10 Která z následujících matic zadává lineární zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které otáčí rovinu o $90°$ proti směru hodinových ručiček? Uvažujte násobení maticí zleva.

A $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

***D** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

---

11 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x-2y+z&=4\\ x+2y-3z&=-2\\ 5x+2y-5z&=-2 \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.
***B** Soustava nemá řešení.
C Soustava má právě jedno řešení.
D Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.
E Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.

Matematická analýza

12 Nechť $f : \langle 0,5\rangle \to \mathbb{R}$ je libovolná spojitá funkce taková, že $f(0)=3$ a $f(5)=-2$. Které z následujících tvrzení je obecně pravdivé? (Pozn.: Symbolem $f'(x)$ značíme derivaci funkce $f(x)$.)

***A** Existuje $x \in \langle 0,5\rangle$ takové, že $f(x)=0$.
B Existuje $x \in \langle 0,5\rangle$ takové, že $f'(x)=0$.
C Funkce f je na $\langle 0,5\rangle$ klesající.
D $f'(x)<0$ pro každé x z $\langle 0,5\rangle$.
E $f(2)>f(3)$

---

13 $\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{x^2+5}{x^3}\right) =$

A ∞
***B** 1
C -1
D 0
E limita neexistuje

---

14 Která z následujících funkcí *není* spojitá na intervalu $\langle -1,1\rangle$?

A $\frac{x+2}{\cos(x)}$

B $\frac{1}{5-x}$

C $\tan(x)$

***D** $\frac{1}{\sin(2\pi+x)}$

E $\frac{1}{x+2}$

---

15 Uvažme reálnou funkci $f(x)=|x|$. Které z následujích tvrzení je pravdivé? ($|x|$ značí absolutní hodnotu čísla x.)

A Obor hodnot funkce f je množina $\mathbb{R}$.
B Funkce f je prostá.
C Funkce f má v každém bodě $\mathbb{R}$ derivaci.
D Funkce f je na celém svém definičním oboru monotonní.
***E** Funkce f má v každém bodě $\mathbb{R}$ limitu.

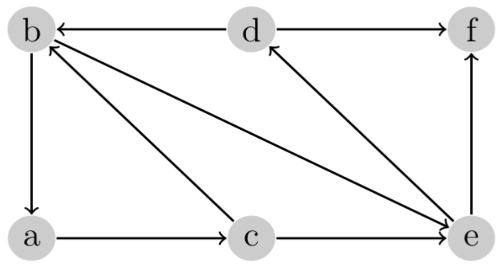
---

16 Uvažme reálnou funkci $f(x)=(x-3)^2+2x-2$. Tato funkce nabývá na $\mathbb{R}$ lokálního minima v jediném bodě x_0. Který z následujících bodů je roven x_0?

A 0
B žádný z uvedených
C -1
***D** 2
E 1

Teorie grafů

17 Uvažme následující orientovaný graf:



Rozhodněte, které z následujících tvrzení o prohledávání daného grafu **do hloubky** z vrcholu a platí. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledání do hloubky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)

A Vrchol b bude vždy objeven dříve než vrchol e.
B Vrchol f bude vždy objeven jako poslední.
C Vrchol d bude vždy objeven dříve než vrchol f.
D Vrchol f může být objeven dříve než vrchol e.
***E** Vrchol b může být objeven jako poslední.

---

18 Kolik existuje neizomorfních souvislých neorientovaných acyklických grafů (stromů) o 4 vrcholech?

A 4
B 1
C 3
D 5
***E** 2

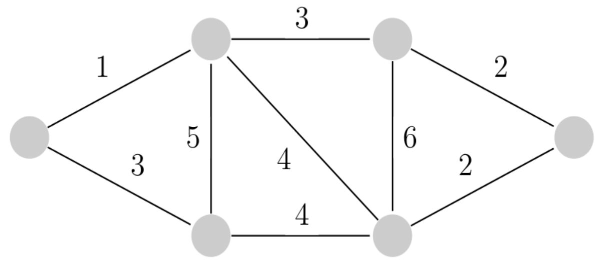
---

19 Nechť G je libovolný neorientovaný graf o 7 vrcholech a 5 hranách. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A G je úplný graf.
B Graf G se zadanými vlastnostmi neexistuje.
C G je strom.
***D** G není souvislý.
E G je souvislý.

---

20 Uvažme následující neorientovaný, hranově ohodnocený graf:



Jaká je cena (tj. součet ohodnocení hran) jeho minimální kostry?

A 13
B 12
C 10
***D** 11
E 14

---

21 Nechť G je libovolný graf o 7 vrcholech takový, že každý vrchol má stupeň nejvíce 4. Které z následujících tvrzení je obecně pravdivé?

A G je nesouvislý.
***B** G nemá více než 14 hran.
C G je souvislý.
D G má alespoň 10 hran.
E G je strom.

Pravděpodobnost

---

22 Postupně dvakrát po sobě hodíme hrací kostkou, přičemž jednotlivé hody jsou na sobě nezávislé. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že součet hodnot z obou hodů bude 10, za podmínky, že při druhém hodu padlo číslo větší než 3?

A $\frac{1}{8}$
***B** $\frac{1}{6}$
C $\frac{1}{3}$
D $\frac{1}{2}$
E $\frac{1}{12}$

23 Mějme pravděpodobnostní prostor a v něm dva náhodné jevy A a B takové, že $P(B) \neq 0$. Čemu se rovná podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$?

A $\frac{P(A)}{P(A \cap B)}$

B $\frac{P(A)}{P(B)}$

***C** $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

D $\frac{P(A)}{P(A \cup B)}$

E $\frac{P(A \cup B)}{P(B)}$

---

24 Mějme statistický soubor $\{2, 13, 0, 3, 10, 4, 10, 6, 2, 10\}$. Které z následujících tvrzení o průmeru a mediánu tohoto souboru je pravdivé?

A Průměr je 5, medián je 5.
***B** Průměr je 6, medián je 5.
C Průměr je 6, medián je 4.
D Průměr je 6, medián je 6.
E Průměr je 5, medián je 6.

---

25 Mějme náhodnou veličinu X takovou, že $P(X = 0) = \frac{1}{3}, P(X = 2) = \frac{1}{3}, P(X = 4) = \frac{1}{6}, P(X = 8) = \frac{1}{6}$. Vypočtěte *střední hodnotu* náhodné veličiny $3X$. (Pozn.: Zápis $P(X = y)$ značí pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X nabude hodnoty y.)

A 2
***B** 8
C 4
D 6
E 10